

Θεωρία Αποφάσεων Bayes

Ασκ σελ 58, 2.3 (η άσκηση στο προηγ. μάθημα που έγινε λάθος)

Για τη Γάμμα Κατανομή $G(a, \beta)$, Διαίρετος (m)

Ισχύει προσεγγιστικά ότι $m \approx a\beta \frac{3a-0.8}{3a+0.2}$

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta \cdot e^{-\theta x}}{x^{-2} \Gamma(2)} d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x|\theta) = \theta e^{-x\theta} \quad \theta > 0 \\ f(\theta) = 1 \quad \theta > 0 \\ f(\theta|x) \propto \theta e^{-x\theta} \\ \frac{x^{a-1} e^{-x/\beta}}{\beta^a \Gamma(a)} \end{array} \right.$$

Άσκηση 4 Έστω $T, \tilde{T} \overset{x_1, \dots, x_n}{\sim} T, \omega \quad X|\theta \sim N(\theta, 1)$, δηλ. $f(x|\theta) = (2\pi)^{-1/2} e^{-1/2(x-\theta)^2}$

Η θ έλκεται από των προτέρων κατανομή $N(0, 1)$, δηλ.

$$f(\theta) = (2\pi)^{-1/2} e^{-1/2\theta^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$x \in \mathbb{R}$
 $\theta \in \mathbb{R}$

Να υπολογιστεί η σωληση κινδύνου κατά Bayes για τον εκτιμητή Bayes d^* (της θ), Σωληση απώλειας το T.S.

Λύση

Έστω d^* ο εκτιμητής Bayes της θ .

Ζητείται να υπολογιστεί η $R(f, d^*) = E_{\theta}(R(\theta, d^*))$.

$$\begin{aligned} \text{Θα έχουμε ότι } f(\theta|x) &\propto e^{-1/2\theta^2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2} = e^{-\frac{1}{2} [\theta^2 + (n\theta^2 - 2\theta \sum x_i)]} \\ &= e^{-(n+1)/2 \cdot \theta^2 + \theta \sum_{i=1}^n x_i} \quad (*) \quad (\text{κρατάμε μόνο όρους που έχουν το } \theta) \end{aligned}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Όταν $\theta|x \sim N(\mu, \sigma^2)$ είναι η σπη $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta^2 - 2\theta\mu + \mu^2)}$
 $= (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta^2 - 2\theta\mu)}$

$$(*) = e^{-\frac{1}{2}(n+1) [\theta^2 - 2\theta(\frac{\sum x_i}{n+1})]}$$

Επομένως θα έχουμε ότι $\theta|x \sim N(\mu^*, \sigma^{*2})$ με $\mu^* = \frac{\sum x_i}{n+1}$
 $\sigma^{*2} = 1/(n+1)$

Επομένως για τον εκτιμητή Bayes της θ , από το Πόρισμα 1 του γνωστού μας Θεωρήματος θα έχουμε ότι: $d^* = E_{\theta|X \sim N(\mu^*, \sigma^*)}(\theta) = \frac{\sum x_i}{n+1} = \mu^*$.

Επίσης θα είναι: $R(f, d^*) = E_{\theta}(R(\theta, d^*))$

$$\begin{aligned} \text{όμως } R(\theta, d^*) &= \frac{2 \cdot 1.2}{n+1} [x_{(n)}(d^* - \theta)^2] = \text{Var}(d^*) + [E(d^*) - \theta]^2 \\ &= \text{Var}\left(\frac{\sum x_i}{n+1}\right) + \left[E\left(\frac{\sum x_i}{n+1}\right) - \theta\right]^2 \end{aligned}$$

$$\text{ΟΠΩΣΤΕ } R(\theta, d^*) = \frac{n}{(n+1)^2} + \left(\frac{n\theta}{n+1} - \theta\right)^2 = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{n+\theta^2}{(n+1)^2}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η $R(\theta, d^*)$ δεν είναι σταθερή ως προς θ . Επομένως ο d^* δεν είναι minimax.

$$\begin{aligned} \text{Επομένως θα έχουμε: } R(f, d^*) &= E_{\theta}\left(\frac{n+\theta^2}{(n+1)^2}\right) = \frac{n + E(\theta^2)}{(n+1)^2} = \\ &= \frac{n + \text{Var}(\theta) + [E(\theta)]^2}{(n+1)^2} \quad \underline{\theta \sim N(0,1)} \quad \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Άσκηση 5: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ από $f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}$, $0 < x < \theta$ και $f(\theta) = 1$ $0 < \theta < 1$

ή $\theta \sim U(0,1)$

i) Συνολο απώλειας $L(\theta, d) = (d - \theta)^2$

ii) Συνολο απώλειας $L(\theta, d) = \frac{(d - \theta)^2}{\theta^2}$

Να υπολογιστεί ο εκτιμητής Bayes της θ για τις δύο περιπτώσεις ΣΑ.
Λύση

$$\text{Θα έχουμε ότι: } \begin{cases} 0 < X_1 < \theta \\ 0 < X_2 < \theta \\ \vdots \\ 0 < X_n < \theta \\ 0 < \theta < 1 \end{cases} \Rightarrow X_{(n)} = \max(X_i) < \theta < 1 \text{ πεδίο ορισμού της εκ των υστέρων.}$$

Επομένως θα είναι

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta) \prod f(x_i|\theta)}{\int_{\theta} f(\theta) \prod f(x_i|\theta) d\theta} = \frac{1 \cdot \prod \frac{2x_i}{\theta^2}}{\int_{\theta} 1 \cdot \frac{2x_i}{\theta^2} d\theta} = \frac{\frac{1}{\theta^{2n}}}{\int_{X_{(n)}}^1 \frac{1}{\theta^{2n}} d\theta} = \frac{\theta^{-2n}(2n-1)}{X_{(n)}^{-2n+1} - 1}$$

$X_{(n)} < \theta < 1$

$$i) d^* \frac{\Sigma A = T \Sigma}{\Sigma} E_{\theta|X}(\theta) = \int_{X(n)}^1 \theta \cdot \frac{\theta^{-2n} (2n-1)}{X(n)^{-2n+1} - 1} d\theta = \dots = \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{X(n)^{-2n+2} - 1}{X(n)^{-2n+1} - 1}$$

$$ii) \text{ Για τη συνολική απώλεια } L(\theta, d) = \frac{(d-\theta)^2}{\theta^2}$$

Θα πρέπει βάλει το γνωστό μας θεωρήματος να ελαχιστοποιήσω την ποσότητα $E_{\theta|X}(L(\theta, d))$ οπότε θα είναι:

$$E_{\theta|X}(L(\theta, d)) = \int_{\theta} \frac{(d-\theta)^2}{\theta^2} f(\theta|X) d\theta = \text{Παραγωγίζω ως προς } d \text{ και θέτω } 100 \mu\epsilon \tau\omicron \mu\eta\delta\epsilon\upsilon\omicron.$$

$$\int_{\theta} \frac{2(d-\theta)}{\theta^2} f(\theta|X) d\theta = 0 \Rightarrow d \int \frac{1}{\theta^2} f(\theta|X) d\theta = \int \frac{1}{\theta} f(\theta|X) d\theta =$$

$$\text{οπότε } d^* = \frac{\int_{\theta} \frac{1}{\theta} f(\theta|X) d\theta}{\int_{\theta} \frac{1}{\theta^2} f(\theta|X) d\theta} = \frac{E_{\theta|X}(\theta^{-1})}{E_{\theta|X}(\theta^{-2})}.$$

$$\text{όμως } E_{\theta|X}(\theta^{-1}) = \int_{X(n)}^1 \theta^{-1} \cdot \frac{\theta^{-2n} (2n-1)}{X(n)^{-2n+1} - 1} d\theta = \frac{\int_{X(n)}^1 \theta^{-2n-1} d\theta}{\int_{X(n)}^1 \theta^{-2n-2} d\theta} = \frac{(2n+1)(X(n)^{-2n} - 1)}{(2n)(X(n)^{-2n+1} - 1)}$$

$$\text{και } E_{\theta|X}(\theta^{-2}) = \int_{X(n)}^1 \theta^{-2} \cdot \frac{\theta^{-2n} (2n-1)}{X(n)^{-2n+1} - 1} d\theta$$

$$\text{άρα } d^* = \frac{(2n+1)(X(n)^{-2n} - 1)}{(2n)(X(n)^{-2n+1} - 1)}.$$

Διάστημα εμπιστοσύνης κατά Bayes.

ΥΠΕΝΟΧΜΙΣΗ

Διάστημα εμπιστοσύνης (Δ.Ε)

$$I\delta\epsilon\alpha \quad P_{\theta|x}(1-\alpha) = 1-\alpha$$

$Q = Q(x_1, \dots, x_n, \theta)$: αντιστρεπτή ποσότητα για την εύρεση ενός $100(1-\alpha)\%$ ΔΕ για την θ .

Δ.Ε κατά Bayes

Έστω τ.δ $x_1, x_2, \dots, x_n$ από ένα πληθυσμό με σπη ή σπ $f(x|\theta)$ όπου θ η τιμή της τ.μ Θ με εκ των προτέρων κατανομή $f(\theta)$ (καθορίζεται) και εκ των υστέρων $f(\theta|x)$ (υπολογίζεται). Θέλουμε (στόχος μας είναι) να προσδιορίσουμε τα σημεία q_1, q_2 που είναι τ.ω:

$$P_{\theta|x}(q_1 \leq \theta \leq q_2) = 1-\alpha.$$

δηλ. ζητάμε να βρούμε ένα διάστημα της μορφής $P_{\theta|x}(L(x) \leq \theta \leq U(x)) = 1-\alpha$ με $q_1 = L(x)$ και $q_2 = U(x)$.

Ερμηνεία Δ.Ε.

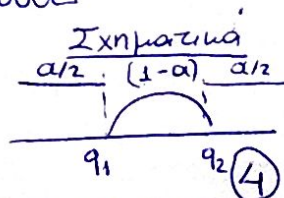
Αν επαναλαίβουμε το πείραμα 100 φορές και υπολογίζουμε κάθε φορά το Δ.Ε. τότε αναμένουμε στο $100(1-\alpha)\%$ των φορών η πραγματική τιμή του θ να είναι εντός του διαστήματος (L, U)

Υπάρχουν δυο τρόποι προσδιορισμού των q_1, q_2 :

Ο 1ος Τρόπος έρχεται στην επιλογή των q_1, q_2 έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης $L = q_2 - q_1$, τότε λέμε ότι βρήκαμε το Δ.Ε. ελαχίστου μήκους.

Ο 2ος Τρόπος έρχεται στην επιλογή των q_1, q_2 έτσι ώστε οι αμέσως πιθανότητες να ισούνται με $\alpha/2$.

$P_{\theta|x}(\theta \leq q_1) = P_{\theta|x}(\theta \geq q_2) = \frac{\alpha}{2}$ τότε λέμε ότι βρήκαμε το Δ.Ε. ίσων ουρών



ΣΗΜΕΙΩΣΗ Προτιμούνται το δ.ε. ελαχίστου μήκους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ στην εύρεση δ.ε. ελαχίστου μήκους

• Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την $l = q_2 - q_1$ παραχμίζοντας ως προς q_1 θα έχω:

$$\frac{dl}{dq_1} = \frac{dq_2}{dq_1} - 1 \begin{pmatrix} q_1: \text{μεταβλητή} \\ q_2: \text{συνάρτηση της } q_1. \end{pmatrix}$$

Παραχμίζοντας ως προς q_2 θα έχω:

$$\frac{dl}{dq_2} = 1 - \frac{dq_1}{dq_2} \begin{pmatrix} q_2: \text{μεταβλητή} \\ q_1: \text{συνάρτηση της } q_2 \end{pmatrix}$$

Η εύρεση είτε του $\frac{dq_2}{dq_1}$ είτε του $\frac{dq_1}{dq_2}$ γίνεται χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$P_{\theta/x}(q_1 \leq \theta \leq q_2) = 1 - \alpha$, η οποία ισοδύναμα είναι (στη συνεχή περίπτωση)

$$\boxed{\Xi_{\theta/x}(q_2) = \Xi_{\theta/x}(q_1) = 1 - \alpha} \quad (1) \quad \text{όπου } \Xi_{\theta/x} \text{ η ασκ της } \theta/x.$$

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το $\frac{dq_2}{dq_1}$

Παραχμίζω ως προς q_1 την (1) και θα έχω $\frac{d\Xi_{\theta/x}(q_2)}{dq_1} - \frac{d\Xi_{\theta/x}(q_1)}{dq_1} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d\Xi_{\theta/x}(q_2)}{dq_1}}_{\substack{\text{συνάρτηση μιας} \\ q_2 \text{ συνάρτησης της } q_1}} - f(q_1) = 0 \Rightarrow f_{\theta/x}(q_2) \frac{dq_2}{dq_1} - f_{\theta/x}(q_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_{\theta/x}(q_1)}{f_{\theta/x}(q_2)} \Rightarrow \boxed{\frac{dl}{dq_1} = \frac{f_{\theta/x}(q_1)}{f_{\theta/x}(q_2)} - 1}$$

• Όμοια διαδικασία: Παραχμίζω ως προς q_2 την (1) θα είναι:

$$\frac{d\Xi_{\theta/x}(q_2)}{dq_2} - \frac{d\Xi_{\theta/x}(q_1)}{dq_2} = 0 \Rightarrow f_{\theta/x}(q_2) - \frac{d\Xi_{\theta/x}(q_1)}{dq_2} \frac{dq_1}{dq_2} = 0 \Rightarrow$$

$$f_{\theta/x}(q_2) - f_{\theta/x}(q_1) \frac{dq_1}{dq_2} = 0 \Rightarrow \frac{dq_1}{dq_2} = \frac{f_{\theta/x}(q_2)}{f_{\theta/x}(q_1)} \Rightarrow \text{οπότε } \boxed{\frac{dl}{dq_2} = 1 - \frac{f_{\theta/x}(q_2)}{f_{\theta/x}(q_1)}} \quad (2)$$

Στην 1^η περίπτωση

Παραγωγώντας ως προς q_1 έχω : $\frac{dl}{dq_1} = \frac{f_{\theta 1x}(q_1) - f_{\theta 1x}(q_2)}{f_{\theta 1x}(q_2)} > 0$

Επομένως το πρόσημο του $\frac{dl}{dq_1}$ εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή. Έστω $f_{\theta 1x}$ φθίνουσα συνλση του θ , τότε καθώς $q_1 < q_2$

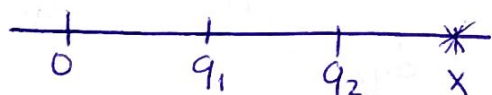
$\Rightarrow f_{\theta 1x}(q_1) > f_{\theta 1x}(q_2)$, άρα $\frac{dl}{dq_1} > 0 \Rightarrow l$ αύξουσα (ως προς q_1)

Επομένως ελαχιστοποιείται ως προς q_1 στο κάτω άκρο του πεδίου ορισμού.

Έστω $f_{\theta 1x}$ αύξουσα συνλση του θ , τότε καθώς $q_1 < q_2 \Rightarrow f_{\theta 1x}(q_1) < f_{\theta 1x}(q_2)$, άρα

$\frac{dl}{dq_1} < 0 \Rightarrow l$ φθίνουσα (ως προς q_1) $\Rightarrow$ ελαχιστοποιείται ως προς q_1 στο πάνω άκρο του π.ο

ΑΤΟΠΟ (δίδει τι τιμή θα παίρει το q_{2j})



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ Όταν η $f_{\theta 1x}$ είναι αύξουσα ΔΕΝ παραγωγίσιμη ως προς q_1 , αλλά ως προς q_2 (2^η περίπτωση)

Στην 2^η περίπτωση

Παραγωγίσιμη ως προς q_2 έχω: $\frac{dl}{dq_2} = \frac{f_{\theta 1x}(q_1) - f_{\theta 1x}(q_2)}{f_{\theta 1x}(q_1)} > 0$

—//— —//—

Έστω $f_{\theta 1x}$ φθίνουσα συνλση του θ , τότε καθώς $q_1 < q_2 \Rightarrow f_{\theta 1x}(q_1) > f_{\theta 1x}(q_2)$.

άρα $\frac{dl}{dq_2} > 0 \Rightarrow l$ αύξουσα (ως προς q_2), Επομένως ελαχιστοποιείται ως προς q_2 στο κάτω άκρο του π.ο ΑΤΟΠΟ (δίνει αν $q_2 =$ κάτω άκρο

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ Όταν $f_{\theta 1x}$ φθίνουσα συνλση του θ ΔΕΝ πρέπει να παραγί και $q_1 < q_2 \Rightarrow$ τι τιμή θα παίξει το q_1 ? (6)

Έστω η $f_{\theta|x}$ αύξουσα συν/ση του θ , δηλ $q_1 < q_2 \Rightarrow f_{\theta|x}(q_1) < f_{\theta|x}(q_2)$

άρα $\frac{dl}{dq_2} < 0 \Rightarrow l$ φθίνουσα (ως προς q_2), επομένως ελαχιστοποιείται ως προς q_2 στο πάνω άκρο του π.ο.

ΣΥΝΟΨΙΖΟΝΤΑΣ

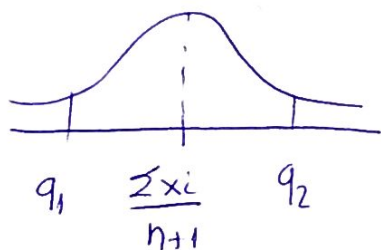
ΚΑΝΟΝΑΣ

Όταν $f_{\theta|x}$ αύξουσα ως προς θ τότε παράγουμε ως προς q_2

Όταν $f_{\theta|x}$ φθίνουσα —//— —//— ως προς q_1 .

Για να έχει νόημα ο κανόνας θα πρέπει να χωρίσω τη συνιστώσα της $f_{\theta|x}$, αλλιώς θα μηδενίω και θα μηδενίω την παράγωγο.

Παράδειγμα Έστω $\theta|x \sim N(\frac{\sum x_i}{n+1}, \frac{1}{n+1})$



$$q_1 < \frac{\sum x_i}{n+1} < q_2 \quad \left(\text{Από πριν έχω αυτή την σχέση} \right)$$

$$\text{Έστω } \frac{dl}{dq_1} = \frac{f_{\theta|x}(q_1) - f_{\theta|x}(q_2)}{f_{\theta|x}(q_2)} = \frac{e^{-(\frac{n+1}{2})q_1^2} - e^{-(\frac{n+1}{2})q_2^2}}{f_{\theta|x}(q_2)}$$

Δεδομένου ότι δε μπορούμε να αποφασίσουμε για τη συνιστώσα της $f_{\theta|x}$ θα μηδενίσουμε την παράγωγο και θα είναι:

$$\frac{dl}{dq_1} = 0 \Rightarrow e^{-\frac{n+1}{2} q_1^2} = e^{-\frac{n+1}{2} q_2^2} \Rightarrow q_1^2 = q_2^2 \Rightarrow \begin{cases} q_1 = q_2 \text{ απορ} \\ q_1 = -q_2 \end{cases}$$